1	10
2	10
3	10
4	10

Tentamen 'Metrische ruimtes' 13/4/2010 dubbelvel 1/3

Opgave 1

a) We willen bewijzen dat (X, τ) een Topologische ruimte is met

$$\tau = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ is eindig}\} \cup \{\emptyset\}$$

X is een niet-lege verzameling (dat mogen we altijd aannemen) en τ is een familie van deelverzamelingen van X, dus hoeven we alleen nog de drie axioma's na te gaan.

T1) $\emptyset \in \tau$ (gegeven) en

$X \in \tau$, want $X \setminus X = \emptyset$ en $\emptyset$ is eindig

dus T1 is geldig

T2) Stel $U, V \in \tau$, dan is $X \setminus U$ eindig en $X \setminus V$ ook. dus is $U \cap V \in \tau$, want $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ is eindig, omdat $X \setminus U$ en $X \setminus V$ eindig zijn.

dus T2 klopt ook.

T3) Stel $U_i \in \tau \ \forall i \in I$, I een willekeurige index-set.

we willen bewijzen dat

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$

welnu, we weten $U_i \in \tau$, ~~dus~~ $\forall i \in I$, dus. $X \setminus U_i$ is eindig $\forall i \in I$, dan is.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$$ ook eindig, want

de arbitraire intersectie van eindige verzamelingen is altijd eindig.
dus is

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$ dus T3 klopt ook.

dit bewijst dat (X, τ) een Topologische ruimte is. $\square$.

b) De discrete topologie τ_d op een verzameling bestaat uit de familie van ALLE mogelijke deelverzamelingen van die verzameling, dus:

$$\tau_d = \{ U \subseteq X \}$$

We willen nu bewijzen dat dit gelijk is aan de co-eindige topologie τ op X als X eindig is.

Kies $x \in X$ willekeurig. Dan is

$\{x\} \in \tau$, want $X \setminus \{x\}$ is eindig omdat X eindig is en dit geldt $\forall x \in X$.

dus $\{x\} \in \tau$ $\forall x \in X$ met X eindig.

dan geldt dat voor elke deelverzameling $U \subseteq X$ geldt dat $U \in \tau$, omdat

$U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$ en $\{x\} \in \tau$ $\forall x \in X$, dus volgens axioma T3 is $U \in \tau$.

dus $\tau = \{U \subseteq X\} = \tau_d$ q.e.d.

Opgave 2

a) Om te bewijzen dat g een homeomorfisme is, moeten we drie dingen bewijzen:

1) g is bijectief.

2) g is continu

3) g^{-1} is continu.

Deze drie dingen zullen we één voor één bewijzen:

1) h is bijectief want $h: X \to Y$ is een homeomorfisme (gegeven) dus is h bijectief.

dan is $g: X \setminus A \to Y \setminus B$

met $g(x) = h(x)\ \forall x \in X \setminus A$ dus ook injectief.

verder is $h(A) = B$ en h is een homeomorfisme, dus is h surjectief en injectief, dus

$$\left.\begin{array}{l} h(X) = Y \\ h(A) = B \\ h \text{ injectief} \end{array}\right\} \Rightarrow h(X \setminus A) = Y \setminus B$$

dus is g surjectief

dus g is injectief en surjectief dus is g bijectief.

2) g is continu: we willen bewijzen dat U open in $Y \setminus B \Rightarrow g^{-1}(U)$ open in $X \setminus A$.

~~Kies $U \subseteq X \setminus A$ willekeurig open in $X \setminus A$~~

~~dan is $U = V \cap (X \setminus A)$ met V open in~~

Kies $U \subseteq Y \setminus B$ open in $Y \setminus B$ willekeurig
dan is $U = V \cap (Y \setminus B)$ voor een (bepaalde) V open in Y.

we willen bewijzen dat $g^{-1}(U)$ open is in $X \setminus A$

test Metrische ruimten 13/4/2010

dubbelvel 2/3

<u>Vervolg opgave 2</u>

vervolg a) volgens de definitie van g is

$g^{-1}(U) = h^{-1}(U) =$

$h^{-1}(V \cap (Y \setminus B)) = h^{-1}(V) \cap h^{-1}(Y \setminus B) =$

$h^{-1}(V) \cap (X \setminus A)$ en h is <u>homeomorfisme</u>, dus

e[illegible] is dus is $h^{-1}(V)$ gen in X.

en dus is volgens de <u>subruimte</u> topologie

$h^{-1}(V) \cap (X \setminus A)$ dan gen in $X \setminus A$

dus $g^{-1}(U)$ is gen in $X \setminus A$ dus

g is continu.

3) g^{-1} is continu:

we willen bewijzen dat

$(g^{-1})^{-1}(U)$ gen is in $Y \setminus B$ ~~als~~ U gen is in $X \setminus A$.

(wanneer)

kies

$U \subseteq X \setminus A$ gen in $X \setminus A$ willekeurig

dan is $U = V \cap (X \setminus A)$ voor een V gen in X

z.o.z.

nu is $(g^{-1})^{-1}(U) = g(U)$ (algemeen geldig $\forall U \subseteq X\setminus A$)

en volgens de definitie van g is dan

$g(U) = h(U) = h(V \cap (X\setminus A)) =$

$h(V) \cap (Y\setminus B)$. en h is een homeomorfisme,

dus h^{-1} is continu dus aangezien V open is in X is $h(V)$ open in Y;

$h(V) = (h^{-1})^{-1}(V)$

dus volgens de subruimte-topologie is dan

$h(V) \cap (Y\setminus B)$ open in $Y\setminus B$

dus g^{-1} is continu.

dit bewijst dat $g : X\setminus A \to Y\setminus B$ een homeomorfisme is

q.e.d.

b) Dit bewijs zullen we doen d.m.v. contradictie:

Stel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ is een homeomorfisme.

kies nu de deelverzameling $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$.

omdat f bijectief is, geldt dan voor de deelverzameling

$B = \{f(0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dat $f(A) = B$

als we dan de stelling, bewezen in 2a, toepassen, volgt dus dat de afbeelding

$g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{f(0)\}$ gegeven door

$g(x) = f(x)$ als $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

ook een homeomorfisme is.

We zullen nu bewijzen dat
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ disconnected is, terwijl
$\mathbb{R}^2\setminus\{f(0)\}$ connected is. Dan:

aangezien connected een topologische
eigenschap is, dwz:
als $h: X \to Y$ een homeomorfisme is
tussen topologische ruimten X en Y,
dan is X connected $\iff$ Y connected

dus geldt (dus) dat $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ niet homeomorf is
met $\mathbb{R}^2\setminus\{f(0)\}$, wat leidt tot een
tegenspraak. !

De conclusie is dan dus dat
er geen homeomorfisme tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$
bestaat.

Nu zullen we bewijzen $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ disconnected
is: def: $U = (-\infty, 0)$ en $V = (0, \infty)$
dan zijn U, V beide niet leeg:
$-1 \in U$ en $1 \in V$

verder zijn U, V beide open in $\mathbb{R}$ en
$U \cap V = \emptyset$ en $U \cup V = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

dus: ...

Dus (U, V) is een partitie van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
wat betekent dat $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ disconnected is

nu zullen we nog laten zien dat
$\mathbb{R}^2 \setminus (f(0))$ connected is

f is injectief, dus $f(0)$ is één enkel geïsoleerd punt in $\mathbb{R}^2$

we weten: $\mathbb{R}^2$ is path-connected

dus $x = f(0) \in \mathbb{R}^2$

dan is $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ path-connected, $\forall x \in \mathbb{R}^2$
aangezien x één enkel geïsoleerd punt is in $\mathbb{R}^2$ en als je één punt uit het platte vlak haalt, kun je nog steeds elke

[illegible] vinden, [illegible] met een pad met elkaar verbinden door om dit ene punt heen te lopen.

dus $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ is path-connected $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

dus $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ is connected
voor elke homeomorfisme f.

~~dit~~ dit maakt het bewijs volledig
q.e.d.

tent Metrische ruimte 13/4/2010

dubbelvel 3/3

Opgave 4

Stel $(X, \tau) = T$ een topologische ruimte met $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ en A, B zijn compact.

we willen bewijzen dat $A \cup B$ compact is.

Kies een willekeurige open cover
$\mathcal{U} = \{ U_i \subseteq X ; i \in I \mid U_i \in \tau \ \forall i \in I \}$
voor $A \cup B$

dan is $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ dus.

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ & $B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ want $A \subseteq A \cup B$ & $B \subseteq A \cup B$

dus $\mathcal{U}$ is een open cover van zowel A als B. dus $\mathcal{U}$ bevat een eindige subcover $\mathcal{U}_A = \{U_1, \ldots, U_r\}$ van A en een eindige subcover
$\mathcal{U}_B = \{V_1, \ldots, V_k\}$ van B, want A en B zijn beide compact. z.o.z.

Dus nu is

$\mathcal{U}' = \mathcal{U}_A \cup \mathcal{U}_B = \{U_1, \dots, U_r, V_1, \dots, V_k\}$

een eindige subcover van $A \cup B$, omdat $\mathcal{U}_A$ & $\mathcal{U}_B$ beide eindige subcovers zijn.

we hebben nu dus bewezen dat een willekeurige open cover van $A \cup B$ een eindige subcover heeft,

dus $A \cup B$ is compact. q. e. d.

Opgave 3

a) bewijzen dat Z_A gesloten is in C is equivalent met te bewijzen dat $C \setminus Z_A$ [illegible]

gaan bewijzen.

Kies dus $g \in C \setminus Z_A$ willekeurig.
we moeten nu bewijzen dat
$B_\varepsilon(g) \subseteq C \setminus Z_A$ $\boxed{\text{voor een}}$ $\varepsilon > 0$ die van g mag afhangen.

Welnu:

$g \in C \setminus Z_A$, dus $\exists\, a \in A$ z.d.d.

$g(a) \neq 0$, kies nu $\varepsilon = \left| \dfrac{g(a)}{3} \right|$,

dan is $\varepsilon > 0$.
dus nu hoeven we alleen nog te bewijzen

dat $B_\varepsilon(g) \subseteq C \setminus Z_A$.

kies $h \in B_\varepsilon(g)$: $B_\varepsilon(g) = \{h \in C \mid d_\infty(h,g) < \varepsilon\}$

dan is $d_\infty(h,g) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |h(x) - g(x)| < \varepsilon$

dus $|h(x) - g(x)| < \varepsilon = \left|\frac{g(a)}{3}\right| \quad \forall x \in [0,1]$

dus $|h(a) - g(a)| < \left|\frac{g(a)}{3}\right|$

en $g(a) \neq 0$, dus $h(a) \neq 0$

dus $h \in C \setminus Z_A$ dus.

[illegible], dus $C \setminus Z_A$ is open in C

dus Z_A is gesloten in C q.e.d.

b). We moeten bewijzen dat

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ z.d.d.

$d_\infty(f,g) < \delta \Rightarrow |I(f) - I(g)| < \varepsilon \quad \forall f,g \in C$

als we dit ~~kunnen~~ bewijzen is I zelfs uniform continu en daarmee dus ook continu.

Kies dus $\varepsilon > 0$ willekeurig en kies daarbij

$\delta = \varepsilon$

dan geldt dat $\forall f, g \in C$:

$d_\infty(f, g) =$

$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - g(x)| < \delta \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$|I(f) - I(g)| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \right| =$

$\left| \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \right| \le$

$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \delta \cdot (1 - 0) = \varepsilon$

Dus I is (uniform) continu op C

q.e.d.